2006 年全国硕士研究生入学考试数学（一）

答案解析与点评

水木艾迪考研辅导班命题研究中心

清华大学数学科学系 刘坤林 谭泽光 俞正光 葛余博

1．06 年考题仍然以基本的概念，理论和技巧为主，注意考察基础知识的理解与简单综合运用。除概率统计比 05 年考题难度略有增加以外，试卷难度普遍降低，估计平均难度系数为 55-62%，平均分数为 80-83 分；而前几年为 38-45%，平均分数只有 60-63 分。

2．各套试题共用题目比例有较大幅度提高，在大纲要求的共同范围内难度趋于统一。特别是数三数四连续几年并无任何经济特色，正如我们在讲座和教学中强调的那样，考的是数学，确切说是理工类数学的能力。这是对 07 年考生的重要参考。

3．06 年考题进一步说明了我们在水木艾迪考研辅导中教学策略的正确性，教学内容的准确性和有效性，包括基础班、强化班及考研三十六计冲刺班，对广大学员的教学引导与训练，使更大面积的考生最大限度受益。

就四套试题的全局而言，水木艾迪考研辅导教学题型、方法与技巧在 06 年的考试中得到完美的体现，许多试题为水木艾迪考研辅导教学或模拟试题的原题，还有大量题目仅仅有文字和符号的差别，问题类型及所含知识点与所用方法完全相同，特别是水木艾迪考研数学三十六计为广大学员提供了全盛的锐利武器。

在面向 07 年考研的水木艾迪考研辅导教学中，水木艾迪的全体清华大学教师将进一步总结经验，不辜负广大考生的支持和赞誉，以独树一帜的杰出教学质量回报考生朋友，为打造他们人生的 U-形转弯倾心工作，送他们顺利走上成功之路。

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ $\underline{\ 2\ }$

【解析与点评】 $x\ln(1+x)\sim x^2,\quad 1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2(当x\to 0时)$。

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 1-1 及例 1-3 等题目。

（2）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{y=cxe^{-x}\,(x\neq 0)}$ 。

[解析与点评] 分离变量积分即可。这是变量可分离方程。

水木艾迪 2006 考研数学教学中有若干此类例题。例如水木艾迪 2006 考研数学白分训练营模拟试题数（第一套）四第 3 题，（第二套）数四第 2 题，水木艾迪 2006 考研数学强化班第 2 讲例 1 与第 7 讲例 1。

（3）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le x\le 1)$ 的下侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\underline{2\pi}$$

【解析与点评】补一个曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$ 上侧，应用 Gauss 公式。

$$X=x,\quad Y=2y,\quad Z=3(z-1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=1+2+3=6$$

$$\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma 1}=\iiint_{\Omega}6dxdydz\quad (\Omega\text{为锥面}\Sigma\text{和平面}\Sigma_1\text{所为区域})$$

$$=6V\quad (V\text{为上述圆锥体体积})$$

$$=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$$

而 $\iint_{\Sigma_1} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$

注意 在Σ_1上有：$z=1$，$dz=0$。

参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第十二讲例 6、7、8 等题目；或水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 20-5 等题目。

（4）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=\underline{\sqrt{2}}$.

【解析与点评】 $d=\dfrac{|3\times2+4\times1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{50}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\sqrt{2}}$。

本题属于**水木艾迪 2006 考研数学基础班**简单基本例题。**参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第九讲例 5 等题目**

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$ __________.

【解析与点评】本题主要考查矩阵运算，矩阵乘积的行列式，和行列式计算等．这是比较简单的一道题，只要掌握水木艾迪春季班和冲刺班关于矩阵运算，矩阵方程，以及行列式计算等内容及相应的例题，就很容易做这道题了。

[解] 由 $BA=B+2E$，得 $B(A-E)=2E$，两边取行列式，得

$$|B||A-E|=|2E|=4$$

又 $|A-E|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$，因此 $|B|=2$.

（6）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le1\}=$__________. **【答案】** $\dfrac{1}{9}$

【解析与点评】 $P(\max\{X,Y\}\le1)=P(X\le1,Y\le1)=P(X\le1)P(Y\le1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

考研大纲明确提出均匀分布是要求熟练掌握的重要分布之一，而最（大、小）值函数是要求熟练掌握的随机向量的函数分布。本题是这两个重要基本知识和基本技能的结合，是

我们水木艾迪历次辅导班讲课的重点。例如 36 计（冲刺班）的§1.5.2 强调求最值函数分布方法和技巧，连续型见例 1.5.13，离散型见例 1.5.8 和 1.5.11，强化班对应为的§3.3.2 和例 3.3.13，离散型见例 3.3.9 和 3.3.10，均匀分布概率计算则分别见冲刺班例 1.2.2、例 1.4.6 及强化班例 1.3.7、例 3.1.7.

二、选择题（每小题 4 分，共 32 分）

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0,\quad \Delta x$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则【 A 】

（A） $0<dy<\Delta y$　　（B） $0<\Delta y<dy$

（C） $\Delta y<dy<0$　　（D） $dy<\Delta y<0$

【解析与点评】因为　$f'(x)>0,$ 则$f(x)$ 严格单调增加，$f''(x)>0,$ 则$f(x)$ 为凹

又 $\Delta x>0$，故　$0<dy<\Delta y$。或直接划草图更为直观。

（8）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于　　【 C 】

（A） $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　（B） $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

（C） $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　（D） $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

【解析与点评】 直接划草图交换积分次序。**本题二重积分基本题， 由极坐标系化直角坐标，直接画草图按先 x 对后对 y 的积分次序即得。参见水木艾迪 2006 考研数学强化班第十一讲例 6，例 13 等题目。**

（9）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数　　【 D 】

（A） $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　（B） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　（D） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

【解析与点评】【解法 1】直接感觉法：

首先 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，运用运算法则可知(D)收敛。

【解法 2】反例排它法：取反例 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt n}$，可排除(A)(B)(C)。

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 9-2，基础班例 8.15，,强化班第 6 讲例 5，例 9 等题目。

（10）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是【　D　】

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

【解析与点评】【解法 1】构造格朗日函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 & (1) \\ F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 & (2) \\ F_\lambda'=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

对（2）由于 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$，得到 $\lambda=-\dfrac{f_x'(x_0,y_0)}{\varphi_x'(x_0,y_0)}=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，

从而有　$f_x'(x_0,y_0)\cdot\varphi_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)$

当 $f_x'(x_0,y_0)=0$ 时，可推出 $f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)=0$， 而由此推不出：

$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 或 $f_y'(x_0,y_0)=0$， 因而否定 （A），(B)。

当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，加上 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$,可推出 $f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$，由此可推出: $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$。

【解法 2】由极值点必要条件得到

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)y'\big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0$$

当 $f_x'(x_0,y_0)=0$，及 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，可推出 $f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)=0$， 而由此推不出：$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 或 $f_y'(x_0,y_0)=0$， 因而否定 （A），(B)。

当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$时，加上$\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$,可推出

$$f_x'(x_0,y_0)\cdot\varphi_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)\cdot\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0,$$

由此可推出：$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$。因而选 （D）.

【解法 3】由多元函数条件极值点必要条件的几何意义可直接由$\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$和$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，直接得到得到$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

该题考查条件极值必要条件的一些代数性质，从代数解，除拉格伦日条件外，其它运用的都是初等代数知识．若从多元函数条件极值点必要条件的几何意义来考查，做法就很简单，有关用这方面内容来设计的题目，可参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 16-1。

（11）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是

（A）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

（B）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

（C）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

（D）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关　　【 A 】

【解析与点评】　本题主要考查向量组线性相关的判断．可以用定义，也可以转化为矩阵的秩来做，在水木艾迪辅导班上这类问题的分析方法是重点辅导的内容。

【解法 1】利用定义．

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,则存在不全为 0 的常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

用A左乘等式两边,得　$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0$,

于是$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关．

【解法 2】利用矩阵的秩．

$$r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=r\big(A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\big)\le r\big(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\big)<s$$

所以$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关．选(A)．

（12）设A为 3 阶矩阵，将A的第 2 行加到第 1 行得B，再将B的第 1 列的-1倍加到第 2

列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则　　　　【 B 】

（A） $C=P^{-1}AP.$　　　　（B） $C=PAP^{-1}.$

（C） $C=P^{T}AP.$　　　　（D） $C=PAP^{T}.$

【解析与点评】本题主要考查矩阵的初等变换，初等矩阵，以及初等变换和初等矩阵的联系．水木艾迪辅导班春季班强化班都有专题进行辅导。只要掌握我们的例题的分析方法，这类题就能迎刃而解。

【解】依题意，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=B$，$B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=C$，

又 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P$，$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P^{-1}$，于是 $C=PAP^{-1}$．选(B)．

（13）设 A, B 为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有

（A） $P(A\cup B)>P(A).$　　　　（B） $P(A\cup B)>P(B).$

（C） $P(A\cup B)=P(A).$　　　　（D） $P(A\cup B)=P(B).$　　　　【 C 】

【解析与点评】 $1=P(A|B)=P(AB)/P(B) ==> P(AB)=P(B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$$

本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式。它们同样是我们历次辅导班讲课的重点。例如 36 计（冲刺班）中第一计“基本概念与基本概率公式的考查要点”的最活跃的概率公式、应用特点和作用，及例 1.1.1 对 $P(A|B)$ 与 P(A)的讨论；强化班对应为§2.1.2 和§1.1.2 及例 2.2.3。

（14）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

(A) $\sigma_1<\sigma_2$。　(B) $\sigma_1>\sigma_2$。　(C) $\mu_1<\mu_2$。　(D) $\mu_1>\mu_2$.　　　　【A 】

【解析与点评】 $P(|X-\mu_1|<1)=P(|X-\mu_1|/\sigma_1<1/\sigma_1)=P(|X^*|<1/\sigma_1)$，$X^*$ 是 X 的标准化，$X^*\sim N(0,1)$，类似有 $P(|Y-\mu_2|<1)=P(|Y^*|<1/\sigma_2)$，$Y^*\sim N(0,1)$

由标准正态分布性质及题设 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，知选 A。

本题考点：正态分布的基本性质和正态分布的标准化技巧。我们历次辅导班都讲“正

态分布是天下最重要的分布”，而“标准化是正态分布的行之有效的重要技巧”。（冲刺班）例 1.6.2 中标准化技巧及例 1.4.2 与例 1.4.3 正态分布，强化班也有对应的内容与例题。

三 解答题（共 94 分）

（15）（10 分） 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$, 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy。$$

【解析与点评】利用对称性，推出 $\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$；

这样，$I=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$。

这是很典型的二重积分计算题，几乎所有微积分参考书中都有。可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第十一讲例 17。

（16）（12 分） 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\ldots)$。

求:（Ⅰ）证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求之 。（Ⅱ）计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。

【解析与点评】 **（1）** $x_2=\sin x_1, 0<x_2\le 1$， ,因此当$n\ge 2$时

$x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$， $\{x_n\}$单调减少。又 $x_n\ge 0$， 即$\{x_n\}$有下界，有极限存在准则，

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在，再由极限的唯一性，将递推公式两边取极限得 $A=\sin A$，解得 $A=0$。

（2）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$,为"1^∞"型

（方法 1）对离散型不能直接用洛必达法则，先考虑

$\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}$，由复合极限定理，只需考虑

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\frac{\sin t-t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$。

（方法 2） 利用重要极限凑成标准型

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left\{\left(1+\frac{\sin t-t}{t}\right)^{\frac{t}{\sin t-t}}\right\}^{\frac{\sin t-t}{t}\cdot\frac{1}{t^2}}$$

由复合极限定理，再考虑如下极限即可：

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\frac{\sin t-t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}$$ 。

参见水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 1-7，基础班例 4.41,强化班第 1 讲例 14，例 19，例 23 等题目。还可参见清华大学出版社《大学数学考研清华经典备考教程 微积分上》(刘坤林、谭泽光编写）第 5 章综例 5.4.8。

（17）（12 分） 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

【解析与点评】 $f(x)=\dfrac{x}{(2-x)(1+x)}=\dfrac{A}{2-x}+\dfrac{B}{1+x}$

$A(1+x)+B(2-x)=x$ 令 $x=2,\quad 3A=2,\quad A=\dfrac{2}{3}$

令 $x=-1,\quad 3B=-1,\quad B=-\dfrac{1}{3}$

$$f(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2-x)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{2})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{[1-(-x)]}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n}+(-1)^{n+1}\right]x^n,\quad |x|<1。$$

参见水木艾迪 2006 考研数学基础班例 9.7，冲刺班 36 计例 10-4，强化班第 1 讲例 14 等题。

（18）（12 分） 设函数 $f(u)$ 在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且 $Z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ)若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$ 求函数$f(u)$的表达式。.

【解析与点评】 (Ⅰ) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(\sqrt{x^2+y^2})\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{(x^2+y^2)}+f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$$

$$=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{(x^2+y^2)}+f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

同理，由轮换对称性得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{(x^2+y^2)}+f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 左端， 得 $f''(\sqrt{x^2+y^2})+\dfrac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

因此得微分方程 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$。

（II）**【解法 1】 看作高阶可降阶方程:** $\begin{cases} f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0 \\ f(1)=0,\ f'(1)=1 \end{cases}$

令 $f'(u)=p$, 则 $\dfrac{dp}{du}=-\dfrac{p}{u}$; $\int\dfrac{dp}{p}=-\int\dfrac{du}{u}+c$

$\ln|p|=-\ln|u|+c$， $f'(u)=p=\dfrac{c}{u}$

$f'(1)=1, c=1, f(u)=\ln u+c_2$，

再由 $f(1)=0$, 得 $c_2=0$ ， 于是 $f(u)=\ln u$。

【解法 2】看作欧拉方程: $\begin{cases} u^2f''(u)+uf'(u)=0 \\ f(1)=0,\ f'(1)=1 \end{cases}$， $u\in(0,+\infty)$

令 $f(u)=u^{\lambda}$，特征方程 $\lambda(\lambda-1)+\lambda=0$，即 $\lambda^2=0$，特征根 $\lambda=0,0$.

微分方程的解： $f(u)=c_1+c_2\ln u$，代入初始条件, 于是 $f(u)=\ln u$

【解法 3】看作全微分方程: $\begin{cases} uf''(u)+f'(u)=0 \\ f(1)=0,\ f'(1)=1 \end{cases}$， $u\in(0,+\infty)$

$$\begin{cases} (uf(u))'=0 \\ f(1)=0,\ f'(1)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} uf'(u)\big|_{u=1}^{u}=0 \\ f(1)=0,\ f'(1)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'(u)=1/u \\ f(1)=0 \end{cases}\Rightarrow f(u)=\ln u$$

这是多元微分学与微分方程综合题，可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第八

讲例 7, 水木艾迪 2006 考研数学 36 计例 15-9 等。

（19）（12 分） 设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$

都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

【解析与点评】由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得：

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2tf(x,y)$$

令 $t=1$, 则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$

记 $X=yf(x,y), Y=-xf(x,y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y)\,;\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)-[f(x,y)+yf_y'(x,y)]$$

$$=-2f(x,y)-[xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)]=0\,,$$

由于是单连通域, 又有满足 $\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0$, 这样, 于是对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭

曲线 L, 都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

这是多元微分学与曲线积分的综合题，是入手该题有两个的关键: 第一是闭路迳上曲线积分为零的条件；第二是 2 次齐次函数的微分性质, 这些可参见水木艾迪 2006 考研数学强化班讲义第十讲例 13, 和强化班讲义第十二讲例 10 等题目.

（20）（9 分） 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases} \text{有3个线性无关的解}$$

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；

（Ⅱ）求 a,b 的值及方程组的通解.

【解析与点评】 本题考查矩阵的秩，非齐次线性方程组的求解等.涉及的知识点有非齐次

线性方程组的解的性质，解的结构，齐次线性方程组的基础解系，向量组的线性相关性，矩阵的秩的定义，用初等变换求解线性方程组等。所有这些都是我们辅导班的重点内容。

【解】 （Ⅰ）设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是方程组的 3 个线性无关的解,则$\alpha_1-\alpha_2$,$\alpha_1-\alpha_3$是$Ax=0$的两个线性无关的解.于是$Ax=0$的基础解系中解的个数不少于 2,即$4-r(A)\ge 2$,从而$r(A)\le 2$．又$A$有一个 2 阶子式$\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}\ne 0$，于是$r(A)\ge 2$，所以$r(A)=2$.

（Ⅱ） 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&-b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&-b-a&1+a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&-b-5+4a&4-2a\end{pmatrix}$$

由$r(A)=2$,得出$a=2,b=3$.代入后继续作初等行变换:

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$x=(2,-3,0,0)^T+k_1(-2,1,1,0)^T+k_2(4,-5,0,1)^T$$

其中k_1,k_2为任意常数.

[解毕]

（21）（9 分） 设 3 阶实对称矩阵A的各行元素之和均为 3,向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$,$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$Ax=0$的两个解,

（Ⅰ）求A的特征值与特征向量；

（Ⅱ）求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^TAQ=\Lambda$.

【解析与点评】本题考查实对称矩阵的性质，矩阵的特征值与特征向量，施密特正交化以及矩阵的相似对角化等．矩阵A有特征值 0，以及 0 的特征向量是通过齐次线性方程组的解的形式给出的。这种类型的问题我们在辅导班上都有过分析，只要将每个基本的知识都会灵活应用，这道题也不难解决。

【解】（Ⅰ） 由题设A的行和均为 3，有

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以，$\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量.

又 α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的线性无关的两个解，即 α_1,α_2 是 A 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量．由此可知，特征值 0 的代数重数不小于 2.

综合之，A 的特征值为 0，0，3． 属于 0 的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，其中 k_1,k_2 是不全为零的常数；属于 3 的特征向量为 $k\alpha_3$，其中 k 是非零常数.

（II）将 α_1,α_2 正交化，

令 $\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt6}(-1,2,-1)^T,\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt2}(-1,0\,1)^T,\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T.$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&0&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$，则有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

（22）（9 分）随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1/2, & -1<x<0\\1/4, & 0\le x<2\\0, & \text{其他}\end{cases}$，令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数。

（I）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（II）求 $F(-\frac{1}{2},4)$

【解析与点评】【解法 1】

（I） $y=x^2$ 的反函数有两支，由**水木艾迪冲刺班例 1.5.3** 知

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_Y(\sqrt{y})+f_Y(-\sqrt{y})]$$

当$-1<x<2\Rightarrow 0<y<4$， 且$0<y<1\Rightarrow 0<\sqrt{y}<1$ 而 $-1<-\sqrt{y}<0$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}]=\frac{3}{8\sqrt{y}}$$

且$1<y<4\Rightarrow 1<\sqrt{y}<2$ 而 $-2<-\sqrt{y}<-1$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4}+0]=\frac{1}{8\sqrt{y}}\text{。}$$

综上 $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II) $F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 4)$

$$=P(X\le-\frac{1}{2},X^2\le 4)=P(X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le 2)=P(-2\le X\le-\frac{1}{2})$$

$$=P(-1\le X\le-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[L(-1,-\frac{1}{2})/L(-1,0)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

其中 L(a,b)表示区间(a,b)的长度。

【解法 2】 (I) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$F_Y(y)\overset{0\le y<1}{=\!=\!=}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y}\text{；}$$

而 $$F(y)\overset{1\le y<4}{=\!=\!=}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}\text{。}$$

所以 $$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II) $F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 4)$

$$=P(X\le-\frac{1}{2},X^2\le 4)=P(X\le-\frac{1}{2},-2\le X\le 2)$$

$$= P(-2 \le X \le -\frac{1}{2}) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}。$$

本题考点：随机变量重要函数的分布；均匀分布的基本概念及联合分布函数的基本概念。它们都是我们辅导班历次讲课重点。例如 36 计（冲刺班）例 1.5.3 求连续型$Y = X^2$一般密度公式及特别情形的计算，强化班的为例 3.3.4.

解法 2 是从联合分布函数的最基本的概率定义入手，对 y 进行适当的讨论得到。这也是辅导班上强调的基本题型。

（**23**）（**9 分**）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1-\theta, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，其中$\theta$是未知参数（0<$\theta$<1）。

$X_1, X_2, \cdots X_n$为来自总体的简单随机样本，记 N 为样本值$x_1, x_2, \cdots x_n$中小于 1 的个数。求θ的最大似然估计。

【解析与点评】依设样 本$x_1, x_2, \cdots x_n$按照从小到大为序（即顺序统计量的观测值）有如下关系：

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(N)} < 1 \le x_{(N+1)} \le x_{(N+2)} \le ... \le x_{(n)}。$$

似然函数 $L(\theta) = \begin{cases} \theta^N (1-\theta)^{n-N}, & x_{(1)} \le \cdots \le x_{(N)} < 1 \le x_{(N+1)} \le \cdots \le x_{(n)} \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

似然函数非零部分得到　$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n-N)\ln(1-\theta)$，

$\dfrac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \dfrac{N}{\theta} - \dfrac{n-N}{1-\theta} = 0$，所以$\hat{\theta} = \dfrac{N}{n}$，　即$\theta$的最大似然估计值为 N/n。

本题考点：最大似然估计的概念和求似然估计的基本方法；顺序统计量及其观测值的概念。它们都是我们辅导班历次讲课重点。例如 36 计（冲刺班）中例 2.2.2, 例 2.2.1, 例 2.2.3 等等、强化班则见例 6.2.2，6.2.4 等。

本题的难点是“ N 为样本值$x_1, x_2, \cdots x_n$中小于 1 的个数 ”的理解，能够想到“ 顺序统计量的观测值 ”的考生凤毛麟角，而顺序统计量是大纲明确要求的。